

CONTRÔLE CONTINU N°1
(Durée 2H30')

Recommandations : Laissez une marge à gauche pour la correction. Mettez le numéro de l'exercice et le numéro de la question avant de répondre. Vous pouvez traiter les exercices dans l'ordre que vous voulez.

Toute fraude ou tentative de fraude sera sévèrement sanctionnée.

Exercice I On considère la fonction $f : x \in [0, +\infty[\rightarrow f(x) = \frac{7x+9}{3x+4}$.

1. Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

On définit deux suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ par

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} w_{n+1} = f(w_n) \\ w_0 = \frac{5}{2} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N},$$

2. Etudier la monotonie de $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$.

3. Montrer que ces deux suites sont convergentes et déterminer leurs limites.

On considère la suite $(v_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} v_{n+1} = 2 + \frac{1}{1+v_n} \\ v_0 = 1 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{2n} = u_n$ et $v_{2n+1} = w_n$.

5. En déduire que $(v_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice II Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable vérifiant

$$g'(x) = 1 + g(x) + g(x)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $g \in C^n(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. On suppose que $g(0) = 0$. Déterminer le développement limité de g à l'ordre 4 en 0.

Exercice III 1. En appliquant convenablement le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad \forall x > 0$$

2. Déterminer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{(\ln x)^2}}$$

Exercice IV On considère la fonction $\varphi(x) = \ln \left(\left| \frac{x+2}{x} \right| \right) - \frac{1}{x+2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de φ et étudier ses limites aux bornes du domaine.

2. Calculer les dérivées première et seconde de φ .

3. En déduire, s'ils existent, les maximum, les minimum et les points d'inflexion de φ .

4. Dresser le tableau de variations de φ .

Exercice 1 1/ $f(x) = \frac{7x+9}{3x+4}$

$$\begin{cases} U_0 = 1; U_{n+1} = f(U_n) \quad n \geq 0 \\ W_0 = \frac{5}{2}; W_{n+1} = f(W_n) \quad n \geq 0 \end{cases}$$

$\forall x \in [0, +\infty[: f'(x) = \frac{1}{(3x+4)^2} > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

2/ * $U_0 = 1 ; U_1 = f(U_0) = f(1) = \frac{16}{7}$

$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} > U_n$

Montrons par récurrence que :

• On a $U_1 > U_0$ car $\frac{16}{7} > 1$

• Supposons que $U_{n+1} > U_n$ et m-q-ue $U_{n+2} > U_{n+1}$

Or $U_{n+1} > U_n$ et f est croissante sur \mathbb{R}^+ donc $f(U_{n+1}) > f(U_n)$ car $U_{n+2} > U_{n+1}$

* $W_0 = \frac{5}{2} ; W_1 = f(W_0) = f(\frac{5}{2}) = \frac{53}{23}$

$W_{n+1} < W_n$

Montrons par récurrence que :

• $W_1 < W_0$ car $\frac{53}{23} < \frac{5}{2}$

• Supposons que $W_{n+1} < W_n$ et m-q-ue $W_{n+2} < W_{n+1}$

Or $W_{n+1} < W_n$ et f est croissante sur \mathbb{R}^+ donc $f(W_{n+1}) < f(W_n)$ car $W_{n+2} < W_{n+1}$

3/ Il que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq \frac{7}{3}$ et $0 \leq W_n \leq \frac{5}{2}$

• Pour $n=0$ $0 \leq U_0 \leq \frac{7}{3}$ et $0 \leq W_0 \leq \frac{5}{2}$ bien vérifié

• Supposons pour n fixé : $0 \leq U_n \leq \frac{7}{3}$ et $0 \leq W_n \leq \frac{5}{2}$

f est croissante sur \mathbb{R}^+ donc $f(0) \leq f(U_n) \leq f(\frac{7}{3})$ et $f(0) \leq f(W_n) \leq f(\frac{5}{2})$

car $\frac{9}{4} \leq U_{n+1} \leq \frac{76}{33}$ et $\frac{9}{4} \leq W_{n+1} \leq \frac{53}{23}$

Or $0 \leq \frac{9}{4}$ et $\frac{76}{33} \leq \frac{7}{3} ; \frac{53}{23} \leq \frac{5}{2}$ donc $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{7}{3}$ et $0 \leq W_{n+1} \leq \frac{5}{2}$

On a (U_n) croissante majorée donc convergente

et (W_n) décroissante minorée donc convergente

leur limite commune l vérifie la relation $l = f(l)$

$l = \frac{7l+9}{3l+4} \rightarrow 3l^2 + 4l = 7l + 9 \rightarrow l^2 - l - 3 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

4/ • Pour $n=0$: $V_0 = U_0$ et $V_1 = W_0$ bien vérifié

• Supposons $V_{2n} = U_n$ et $V_{2n+1} = W_n$ et m-q-ue $V_{2n+2} = U_{n+1}$ et $V_{2n+3} = W_{n+1}$

On a : $V_{2n+2} = \frac{3+2V_{2n+1}}{1+V_{2n+1}} = \frac{3+l \cdot \frac{3+2V_{2n}}{1+V_{2n}}}{1 + \frac{3+2V_{2n}}{1+V_{2n}}} = \frac{9+7V_{2n}}{4+3V_{2n}} = f(V_{2n}) = f(U_n) = U_{n+1}$

$$\text{et } U_{2n+3} = \frac{3+2U_{2n+2}}{1+U_{2n+2}} = \frac{3+2 \cdot \frac{3+2U_{2n+1}}{1+U_{2n+1}}}{1+\frac{3+2U_{2n+1}}{1+U_{2n+1}}} = \frac{9+7U_{2n+1}}{4+3U_{2n+1}} = f(U_{2n+1}) = f(u_n) = u_{n+1}$$

5/ D'après 3/ (u_n) et (v_n) ont la même limite $l = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$
 d'où (U_n) et (V_{n+1}) (qui sont 2 suites extraites de U_n) convergent
 vers l donc (v_n) converge vers l

Exercice 2 g dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = 1 + g(x) + g(x)^2$

1/ Posons $P(x) = 1 + x + x^2$ alors $g' = P \circ g$
 • On a g dérivable et P dérivable sur \mathbb{R} donc $P \circ g$ est dérivable sur \mathbb{R}
 d'où $P \circ g$ est continue car g' est continue $\Rightarrow g$ de classe $C^1(\mathbb{R})$
 • Supposons que $g \in C^k(\mathbb{R}) \quad \forall k \leq n$ et m. que $g \in C^{n+1}(\mathbb{R})$

On a $g^{(n+1)}(x) = (g')^{(n)}(x) = (P \circ g)^{(n)}(x)$
 P et g sont de classe $C^k(\mathbb{R}) \quad \forall k \leq n$ donc g est de classe $C^{n+1}(\mathbb{R})$

2/ $g(0) = 0 \quad g'(0) = 1 + g(0) + g(0)^2 = 1 \quad ; \quad g''(x) = g'(x) + 2g(x)g'(x) \Rightarrow g''(0) = 1$

$$g^{(3)}(x) = g''(x) + 2g'(x)g'(x) + 2g(x)g''(x) \Rightarrow g^{(3)}(0) = 3$$

$$g^{(4)}(x) = g'''(x) + 4g'(x)g''(x) + 2g'(x)g''(x) + 2g(x)g'''(x) \Rightarrow g^{(4)}(0) = 9$$

$$\text{On a : } g(x) = g(0) + \frac{x}{1!} g'(0) + \frac{x^2}{2!} g''(0) + \frac{x^3}{3!} g^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!} g^{(4)}(0) + x^4 \varepsilon(x)$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8} x^4 + x^4 \varepsilon(x)$$

Exercice 3 1/ $f(x) = \text{Arctan } x$, soit $x > 0$

f est sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$ donc d'après T.A.F $\exists \theta \in]0, x[$
 tel que $f(x) - f(0) = (x-0) f'(\theta)$ car $\text{Arctan } x = \frac{x}{1+\theta^2}$

D'après $0 < \theta < x \quad ; \quad 1 < 1+\theta^2 < 1+x^2 \quad ; \quad \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+\theta^2} < 1$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+\theta^2} < x \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \text{Arctan } x < x$$

2/ $(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}} = e^{\frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} \stackrel{\text{Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\cos x))'}{(\sin^2 x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2 \cos^2 x} = -\frac{1}{2}$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Exercice 4

$$\varphi(x) = \ln \left| \frac{x+2}{x} \right| - \frac{1}{x+2}$$

$$1/ x \in D_\varphi \Leftrightarrow \left| \frac{x+2}{x} \right| > 0 \text{ et } x \neq 0 \text{ et } x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq -2$$

$$D_\varphi = \mathbb{R} - \{0, -2\}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x+2}{x} \right| = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \left| \frac{x+2}{x} \right| = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \ln \left| \frac{x+2}{x} \right| = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \varphi(x) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+2)(\ln(x+2) - \ln(x)) - 1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x+2)\ln(x+2) - (x+2)\ln(x) - 1}{x+2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$2/ \varphi'(x) = \left(\frac{x+2}{x} \right)' \cdot \frac{1}{\left(\frac{x+2}{x} \right)^2} = \frac{-2/x^2}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{-2}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{-x-4}{x(x+2)^2}$$

$$\varphi''(x) = \left(\frac{-x-4}{x^3+4x^2+4x} \right)' = \frac{(-x^3-4x^2-4x) - (-x-4)(3x^2+8x+4)}{(x^3+4x^2+4x)^2} = \frac{2(x^2+6x+4)}{x^2(x+2)^3}$$

$$3/ \text{ et } 4/ \bullet \varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
φ'	+	0	-	-	-
φ		\nearrow	\searrow	\searrow	\searrow

φ admet 1 maximum relatif en -4

$$\text{de valeur } \varphi(-4) = \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2}$$

$$\bullet \varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+6x+4=0 \quad ; \Delta=20 \quad ; x_1 = -3-\sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -3+\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$-3-\sqrt{2}$	-2	$-3+\sqrt{2}$	0	$+\infty$
x^2+6x+4	+	0	-	-	0	+
$x+2$	-	-	-	+	+	+
φ''	-	0	+	-	0	+

Les points d'inflexion sont $I(-3-\sqrt{2}, \varphi(-3-\sqrt{2}))$ et $J(-3+\sqrt{2}, \varphi(-3+\sqrt{2}))$

GCC1 05-06 (suite)

Exercice 1

a/ (U_n) suite de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n, m > N : |U_n - U_m| < \varepsilon$

b/ $\exists \varepsilon = 1/2 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ et } m = 2n \in \mathbb{N} \text{ tel que}$

$$|U_{2n} - U_n| = \left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right| \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

donc (U_n) n'est pas 1 suite de Cauchy

Exercice 2

a/ soit $\varepsilon > 0$ existe-il $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N : |U_n - 0| < \varepsilon$

$$\text{Or } |U_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4} \right)^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln \left(\frac{3}{4} \right) < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{3}{4}}$$

il suffit de prendre $N = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln 3/4} \right\rceil + 1$

b) i) $U_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$

lors $1 \leq k \leq n$ on a $1+n^2 \leq k+n^2 \leq n+n^2 \Rightarrow \frac{1}{n+n^2} \leq \frac{1}{k+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$

$\Rightarrow \frac{n}{n+n^2} \leq \frac{n}{k+n^2} \leq \frac{n}{1+n^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{n}{n+n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{k+n^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{1+n^2}$

câd $n \cdot \frac{n}{n+n^2} \leq U_n \leq n \cdot \frac{n}{1+n^2}$ d'où $\frac{n^2}{n^2+n} \leq U_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 1$

ii) On a $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ et

$2\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

câd $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \geq 1$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}) \leq \frac{1}{\sqrt{1}}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

\vdots

$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

Donc $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = +\infty$

Exercice 3 $U_0 = 8$; $U_{n+1} = 6 + \sqrt{U_n}$

On pose $f(x) = 6 + \sqrt{x}$ et on résout l'équation $f(x) = x$ sur $[0, +\infty[$

On trouve $x = 9$. Ainsi si (U_n) c.v vers l alors $l = 9$

a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} : 8 \leq U_n \leq 9$

$8 \leq U_0 \leq 9$ est bien vérifiée

Supp $8 \leq U_n \leq 9$ et m. que $8 \leq U_{n+1} \leq 9$

On a $8 \leq U_n \leq 9$ et f croissante sur $[0, +\infty[$ ($f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$)

donc $f(8) \leq f(U_n) \leq f(9)$ c'd $6 + \sqrt{8} \leq U_{n+1} \leq 9$

Or $8 \leq 6 + \sqrt{8} \Rightarrow 8 \leq U_{n+1} \leq 9$

* Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} > U_n$ par récurrence

- $U_0 = 8$, $U_1 = f(U_0) = 6 + \sqrt{8}$ on a $U_1 > U_0$ donc la proposition est vraie pour $n=0$
- Supposons $U_{n+1} > U_n$ et m-q $U_{n+2} > U_{n+1}$
On a $U_{n+1} > U_n$ et f croissante sur \mathbb{R}^+ $\Rightarrow f(U_{n+1}) > f(U_n) \Rightarrow U_{n+2} > U_{n+1}$
- b/ (U_n) est croissante et majorée donc (U_n) est c.v vers l avec $8 \leq l \leq 9$ et $l = f(l) \Rightarrow l = 9$

Exercice 4 $U_0 \in \mathbb{R}$, $U_{n+1} = \frac{1}{2} \sin U_n + \frac{\pi}{2}$ $n \geq 0$

a/ Montrons tout d'abord que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$

On considère la fct $u(x) = \sin x$ et on applique le T.A.F sur $[a, b]$

u est cont sur $[a, b]$, deriv sur $]a, b[$: $\exists c \in]a, b[: f(a) - f(b) = (a - b) f'(c)$

$$\text{c-à-d } \sin a - \sin b = (a - b) \cos c \quad \text{d'où } |\sin a - \sin b| = |a - b| |\cos c| \leq |a - b|$$

car $|\cos c| \leq 1$

• Pour $n=0$ on a bien $|U_1 - U_0| \leq \frac{1}{2^n} |U_1 - U_0|$

• Supp. $|U_{n+1} - U_n| \leq \frac{1}{2^n} |U_1 - U_0|$ et m-q-ue $|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |U_1 - U_0|$

$$\text{On a : } |U_{n+2} - U_{n+1}| = \left| \left(\frac{1}{2} \sin(U_{n+1}) + \frac{\pi}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \sin(U_n) + \frac{\pi}{2} \right) \right| = \frac{1}{2} |\sin U_{n+1} - \sin U_n|$$

d'après l'inégalité démontrée au début : $|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |U_{n+1} - U_n|$

— " l'hypothèse de récurrence $|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} |U_1 - U_0|$

$$\text{d'où } |U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |U_1 - U_0|$$

$$b/ |U_{n+p} - U_n| = |(U_{n+p} - U_{n+p-1}) + (U_{n+p-1} - U_{n+p-2}) + \dots + (U_{n+1} - U_n)|$$

$$\leq |U_{n+p} - U_{n+p-1}| + |U_{n+p-1} - U_{n+p-2}| + \dots + |U_{n+1} - U_n|$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+p-1}} |U_1 - U_0| + \frac{1}{2^{n+p-2}} |U_1 - U_0| + \dots + \frac{1}{2^n} |U_1 - U_0|$$

$$\leq |U_1 - U_0| \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p-1}} \right) = |U_1 - U_0| \cdot \frac{1}{2^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$\text{d'où } |U_{n+p} - U_n| \leq |U_1 - U_0| \times \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p\right) \leq \frac{|U_1 - U_0|}{2^{n+1}} \quad \left(\text{car } 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p \leq 1\right)$$

c/ On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|U_1 - U_0|}{2^{n+1}} = 0$ donc pour $\varepsilon > 0 \exists N > 0 \forall n > N : \frac{|U_1 - U_0|}{2^{n+1}} < \varepsilon$

d'où $\forall p > 0 \forall n > N : |U_{n+p} - U_n| < \varepsilon$ donc (U_n) est une suite de Cauchy
donc (U_n) est convergente.

Exercice 5 a/ $U_{n+1} - U_n = \frac{1+U_n^2}{2} - U_n = \frac{1+U_n^2-2U_n}{2} = \frac{(U_n-1)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow (U_n)$ croissante

b/ Si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 1$

Si $|\alpha| < 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < U_n < 1$.

Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)$ croissante sur \mathbb{R}^+ ($f'(x) = x > 0$)

- pour $n=1$ $U_1 = \frac{1+\alpha^2}{2}$; $0 < U_1 < 1$ est vraie car $\alpha^2 < 1$
- supposons $0 < U_n < 1$ alors $f(0) < f(U_n) < f(1) \Rightarrow \frac{1}{2} < U_{n+1} < 1$

$$\Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1$$

Ainsi (U_n) est croissante majorée donc convergente vers l tel que

$$l = f(l) \Rightarrow l = 1$$

- si $|\alpha| > 1$ car $\alpha^2 > 1$ on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n > n$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty ; (U_n) \text{ diverge}$$

Exercice 6 $U_0 > 0$; $U_n = \ln(1+U_{n-1})$ $n \geq 1$; $U_n = f(U_{n-1})$

Considérons $f(x) = \ln(1+x)$ définie sur $[0, +\infty[$

- $\forall x \in [0, +\infty[: f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $[0, +\infty[$
- Considérons $u(x) = \ln(1+x) - x$ $u'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$ sur $[0, +\infty[$

donc $u(x)$ est décroissante sur $[0, +\infty[$ donc
 $\forall x \geq 0 : u(x) \leq u(0)$ car $\ln(1+x) - x \leq 0 \Rightarrow \ln(1+x) \leq x$

a/ Il faut que $\forall n \geq 0 : U_{n+1} < U_n$

- pour $n=0$ $U_1 - U_0 = \ln(1+U_0) - U_0 \leq 0$ d'après le résultat précédent
- supposons $U_{n+1} < U_n$; Comme f est croissante alors : $f(U_{n+1}) < f(U_n)$

$$\text{donc } U_{n+2} < U_{n+1}$$

b/ $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 0$

- $U_0 > 0$ est vraie
- supposons $U_n > 0$ alors $U_{n+1} > 0 \Rightarrow \ln(U_{n+1}) > 0 \Rightarrow U_{n+2} > 0$

(U_n) est une suite décroissante et minorée par 0 donc elle est c.v.



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..